Théorème : Soit H un Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non vide.
Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x, C)$.

Existence : Soit $d = d(x,C)$ et $(y_n)_{n\geq 1} \in C^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \geq 1$, $\underbrace{d^2 \leq \|x-y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}}_{}$ $(*)$

par définition de l'inf, une telle suite existe

Montrons que $(y_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy :

Soit $n, p \geq 1$. Par l'identité du parallélogramme appliquée à $x-y_n$ et $x-y_p$, on a :

$$2\underbrace{\|x-y_n\|^2}_{\leq d^2+\frac{1}{n}} + 2\underbrace{\|x-y_p\|^2}_{\leq d^2+\frac{1}{p}} = \underbrace{\|2x-(y_n+y_p)\|^2}_{=4\|x-\frac{y_n+y_p}{2}\|^2} + \|y_n-y_p\|^2$$

Or, $\frac{y_n+y_p}{2} \in C$ par convexité donc $\|x - \frac{y_n+y_p}{2}\| \geq d$. D'où

$$\|y_n-y_p\|^2 \leq 2\left(d^2+\frac{1}{n}\right) + 2\left(d^2+\frac{1}{p}\right) - 4d^2 = 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)$$

Donc $(y_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans H complet, donc converge vers $y \in C$ car C est fermé.

De plus, par passage à la limite dans $(*)$, $\|x-y\| = d$.

Unicité : Soit $y' \in C$ tel que $\|x-y'\| = d$. Alors :

$$2\underbrace{\|x-y\|^2}_{=d^2} + 2\underbrace{\|x-y'\|^2}_{=d^2} = 4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \|y-y'\|^2$$

Or, $\frac{y+y'}{2} \in C$ par convexité donc $\|x - \frac{y+y'}{2}\| \geq d$. D'où

$$\|y-y'\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$$

Donc $\|y-y'\| = 0$ et $y = y'$.

Théorème : Sous les mêmes hypothèses, y est caractérisé par :
$y \in C$ et $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$ $(**)$

- Soit $z \in C$. Par convexité, $\forall t \in]0,1)$, $(1-t)y + tz \in C$. Donc

$$\|x-y\|^2 \leq \|\underbrace{x-(1-t)y-tz}_{=(x-y)+t(y-z)}\|^2 = \|x-y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\langle x-y, y-z\rangle) + t^2\|y-z\|^2$$

$$\Rightarrow 2t\,\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq t^2\|y-z\|^2$$

$$\Rightarrow 2\,\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq t\|y-z\|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \Big\} \; t \in]0,1)$$

- Soit $y \in C$ vérifiant $(**)$. Alors, pour tout $z \in C$,

$$\|x-z\|^2 = \|(x-y)-(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \underbrace{\|z-y\|^2}_{\geq 0} \underbrace{-2\,\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle)}_{\geq 0}$$
$$\geq \|x-y\|^2$$

Donc $y = p_C(x)$ par unicité.